AWCC

電気通信大学

アンテナ･伝播研究会
(H27.01.22)

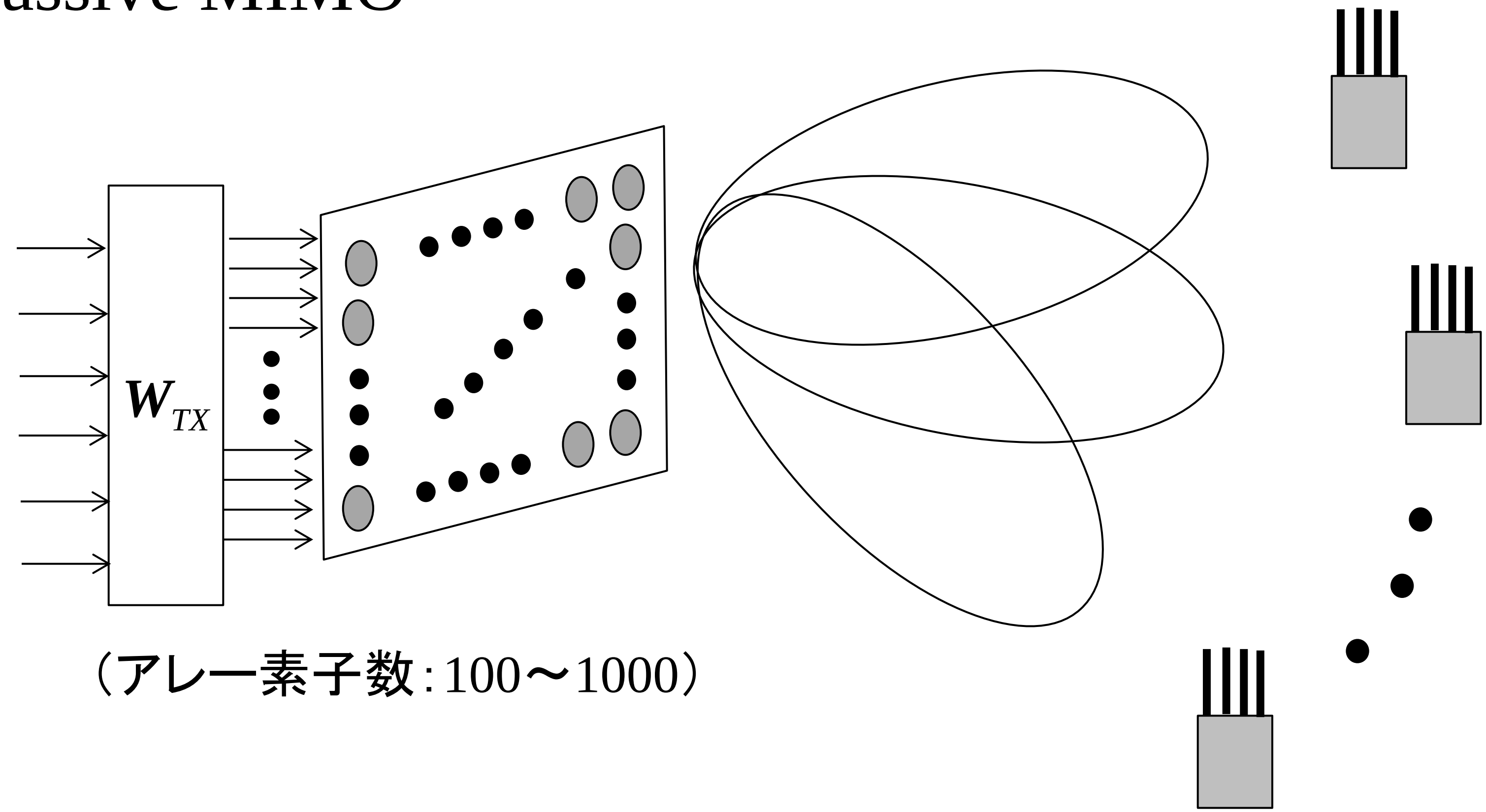
大規模MIMOチャネルの漸近固有値分布と通信路容量：そこから見えてくるもの

唐沢 好男
電気通信大学

発表の内容

- Massive MIMO通信
- 固有値分布と通信路容量
- 漸近固有値分布（マルチェンコ・パスツール則）
- 固有値分布に見られる性質
- 通信路容量に見られる性質
- まとめ

Massive MIMO

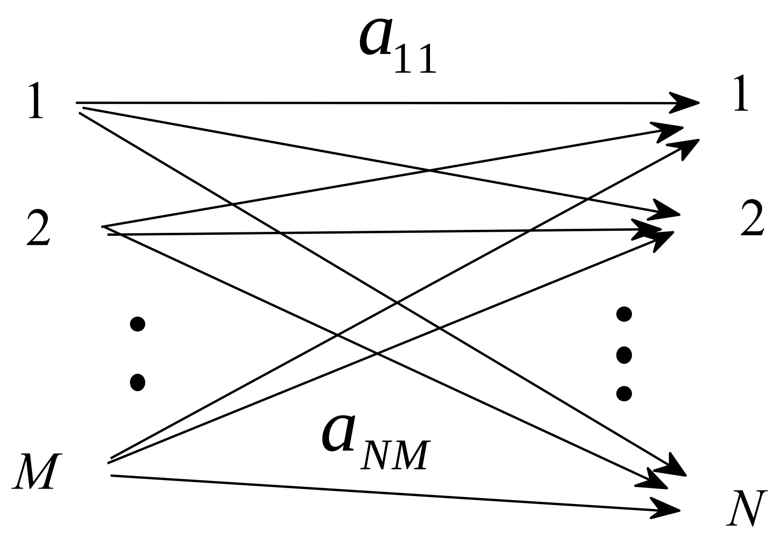


（アレー素子数：100～1000）

基本伝送特性の把握には、
チャネル応答行列の固有値把握が本質

アレーサイズが大きくなると固有値解析が非常に煩雑になる

チャネル応答行列(CSI): $\boldsymbol{A}$



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix}$$

$$m = \min\{M, N\}$$

$$n = \max\{M, N\}$$

ウィシャート行列: $\boldsymbol{W}_r$ and $\boldsymbol{W}_t$

$$\boldsymbol{W}_r \equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \qquad (\text{行列サイズ}: N \times N)$$

$$\boldsymbol{W}_t \equiv \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} \qquad (\text{行列サイズ}: M \times M)$$

固有値 (λ_i ; i = 1, 2, … m) for $\boldsymbol{W}_r$ *or* $\boldsymbol{W}_t$

固有ベクトル ($\boldsymbol{e}_{r,i}$; i = 1, 2, … m) for $\boldsymbol{W}_r$

固有ベクトル ($\boldsymbol{e}_{t,i}$; i = 1, 2, … m) for $\boldsymbol{W}_t$

⇨ 固有値の性質が把握できると
MIMOの基本伝送特性（BER, 通信路容量など）
が評価できる

順序付固有値分布と順序無固有値分布

順序付固有値分布

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$$ λ_i それぞれの確率分布

➡ 送信側でCSIを利用して、最適に送信電力制御を行う場合の通信路容量を求めたい時など

順序無固有値分布

順序付固有値の順序を無視してまとめた固有値全体の分布

➡ 送信側でCSIを利用しない場合の通信路容量を求めたい時など（アンテナから送信される電力の平均値が同じ）

i.i.d レイリーフェージング環境における固有値導出の一般式

順序付固有値の確率分布

$$f_i^{ord}(\lambda_i)=\int_{\lambda_2}^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_{\lambda_i}^{\infty} d\lambda_{i-1} \int_0^{\lambda_i} d\lambda_{i+1} \cdots \int_0^{\lambda_{m-1}} d\lambda_m \, f^{ord}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m)$$

$$f^{ord}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m)=c\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right)\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{n-m}\prod_{j=i+1}^{m}(\lambda_i-\lambda_j)^2$$

$$(\lambda_1 \geq \lambda_2 > \cdots > \lambda_m) \qquad m \equiv \min\{M, N\}, \quad n \equiv \max\{M, N\}$$

順序無固有値の確率分布

$$f_i^{unord}(\lambda_i)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f_j^{ord}(\lambda_i)$$

$$=\int_0^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_0^{\infty} d\lambda_{i-1} \int_0^{\infty} d\lambda_{i+1} \cdots \int_0^{\infty} d\lambda_m \, f^{unord}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m)$$

$$f^{unord}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m)=\frac{c}{m!}\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right)\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{n-m}\prod_{j=i+1}^{m}(\lambda_i-\lambda_j)^2$$

$$=\frac{1}{m!}f^{ord}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m)$$

このアプローチでは
Massive MIMO固有値
解析にはたどり着けない!!

MIMOチャネルの(順序無)固有値解析のアプローチ

小規模MIMO
M, Nの数：小

大規模MIMO
M, Nの数：非常に大

通常固有値解析 → 困難

$$\beta \equiv N / M = \text{一定}$$
$$M \to \infty$$
$$f(\hat{\lambda})$$

$$\lambda = M\hat{\lambda}$$

？ ← 漸近固有値解析

漸近固有値分布（マルチェンコ・パスツール則に基づく）

NとMの比をβとし、そのもとでの$M\rightarrow\infty$での順序無正規化固有値の漸近固有値分布を考える

$$\beta \equiv N/M$$

$$\hat{\lambda} = \lambda / M$$ ← 順序無正規化固有値

$$f(\hat{\lambda}) = \lim_{M\to\infty} M \ f_i^{unord}(M\hat{\lambda})$$ ← 漸近固有値分布

⇩

$$f(\hat{\lambda}) = (1-\beta)^+ \delta(\hat{\lambda}) + \frac{\sqrt{\left(\hat{\lambda}-\hat{\lambda}_-\right)^+\left(\hat{\lambda}_+-\hat{\lambda}\right)^+}}{2\pi\hat{\lambda}}$$

$$\hat{\lambda}_\pm = \left(1 \pm \sqrt{\beta}\right)^2 \qquad (z)^+ = \max(0, z)$$

（M-P則に基づく分布は自由ポアソン分布とも呼ばれる）

$M<N$、すなわち$\beta>1$に限定して

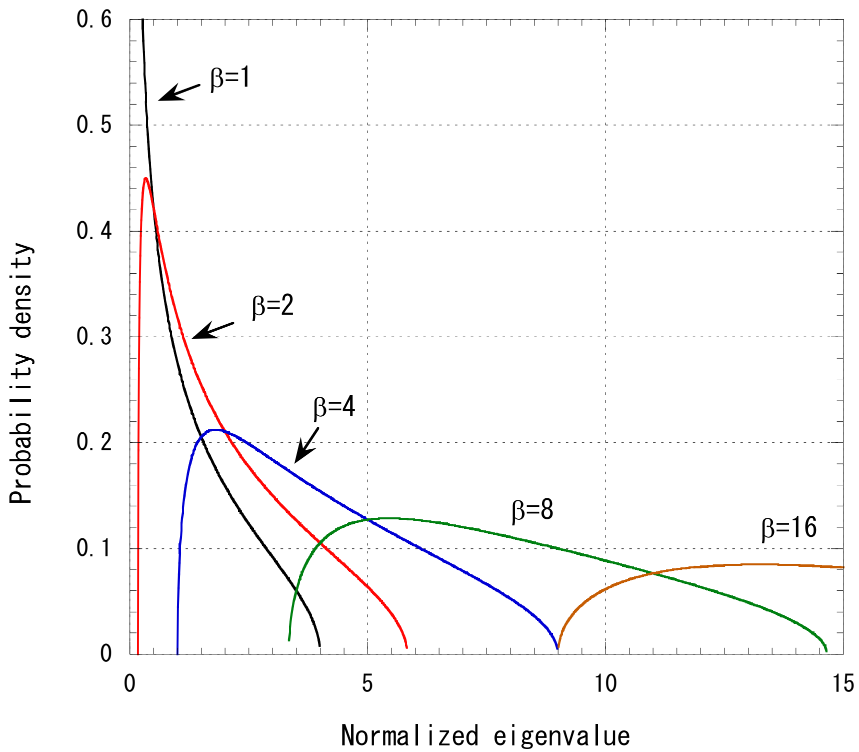
$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta-(\hat{\lambda}-1-\beta)^2}}{2\pi\hat{\lambda}} & \text{for } \left(1-\sqrt{\beta}\right)^2 \le \hat{\lambda} \le \left(1+\sqrt{\beta}\right)^2 \\ 0 & \text{for others} \end{cases}$$

$\beta=1 \ \ (M=N)$ のときは

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4}{\hat{\lambda}}-1} & \text{for } \ 0 \le \hat{\lambda} \le 4 \\ 0 & \text{for others} \end{cases}$$

漸近固有値分布

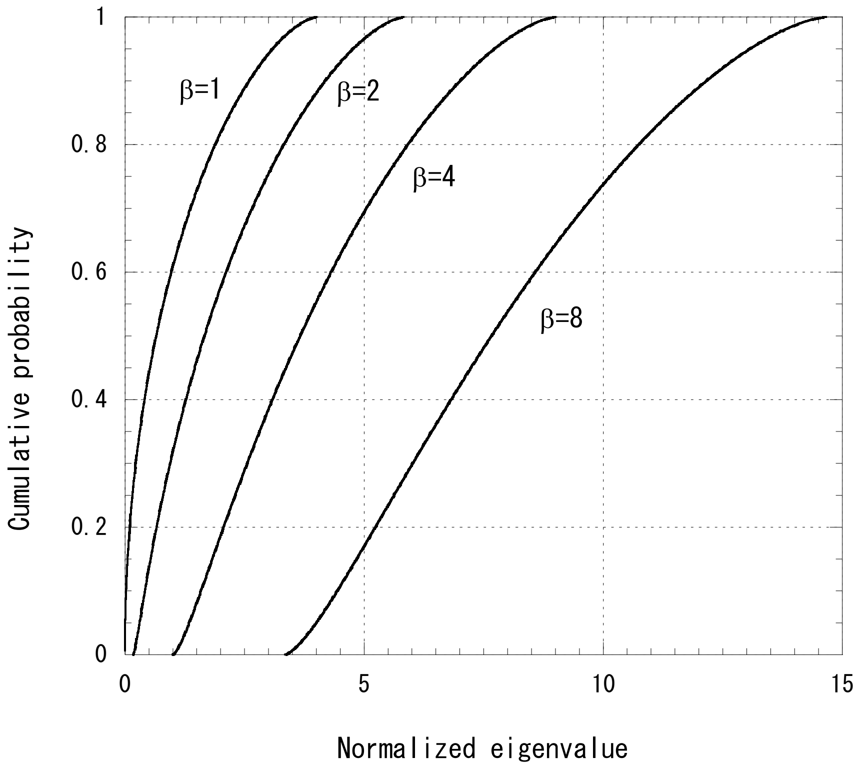
確率密度関数 (PDF)



$$\hat{\lambda} = \lambda / M \quad (M \to \infty)$$

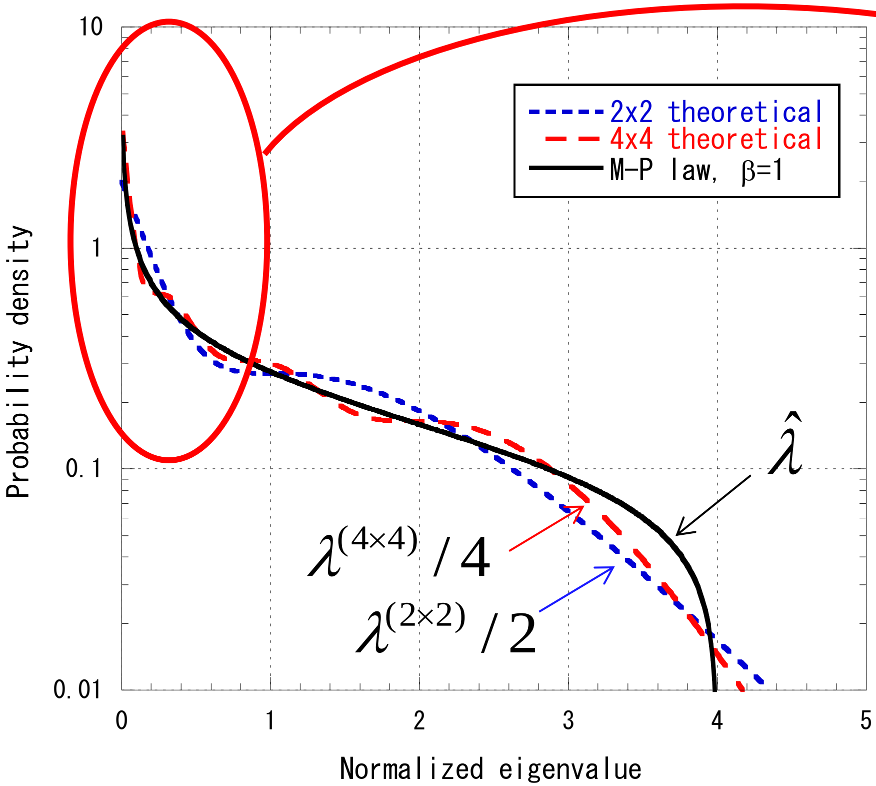
$$\beta \equiv N / M$$

累積分布関数 (CDF)

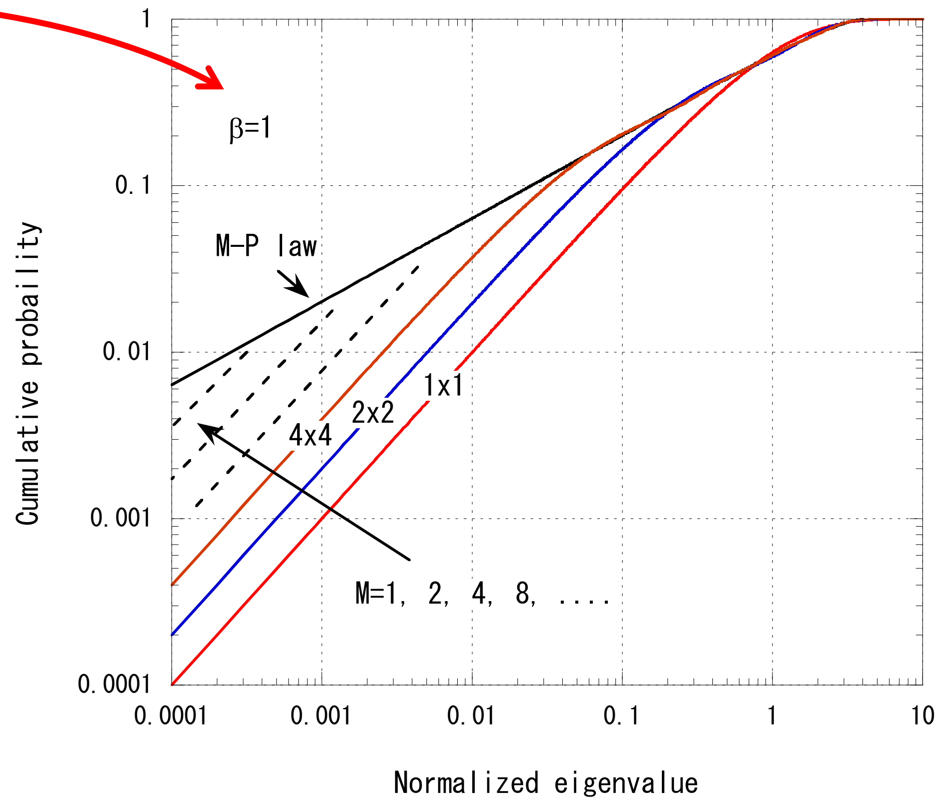


β=1における漸近固有値分布と2x2, 4x4 MIMO等の正規化固有値分布(λ/M)の比較

確率密度関数 (PDF)



累積分布関数 (CDF)



平均通信路容量 $< C >$

$M \times N$ MIMOの順序無固有値分布から

$$\langle C \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda_i}{M} \right) \right\rangle = m \int_0^\infty \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda}{M} \right) f_i^{unord}(\lambda) d\lambda \qquad \text{(bps/Hz)}$$

漸近固有値分布から

$$\langle C \rangle \approx \int_0^\infty \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda}{M} \right) f\left(\frac{\lambda}{M} \right) d\lambda$$

$$= \frac{M}{2\pi} \int_{(1-\sqrt{\beta})^2 M}^{(1+\sqrt{\beta})^2 M} \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{M} \right) \frac{\sqrt{4\beta - \left(\frac{x}{M} - 1 - \beta \right)^2}}{x} dx$$

$\beta = 1$ の時は

$$\langle C \rangle \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{4M} \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda}{M} \right) \sqrt{\frac{4M - \lambda}{\lambda}} d\lambda$$

β=1 (M=N)での平均通信路容量

$$\langle C \rangle \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{4M} \log_2\left(1+\frac{\gamma_0\lambda}{M}\right)\sqrt{\frac{4M-\lambda}{\lambda}}\,d\lambda \qquad \text{(bps/Hz)}$$

Telatar ETT, 1999 論文

$$= \frac{M}{\ln 2}\left(\ln\gamma_0 - 1 + \frac{\sqrt{1+4\gamma_0}-1}{2\gamma_0} + 2\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+4\gamma_0}}\right)$$

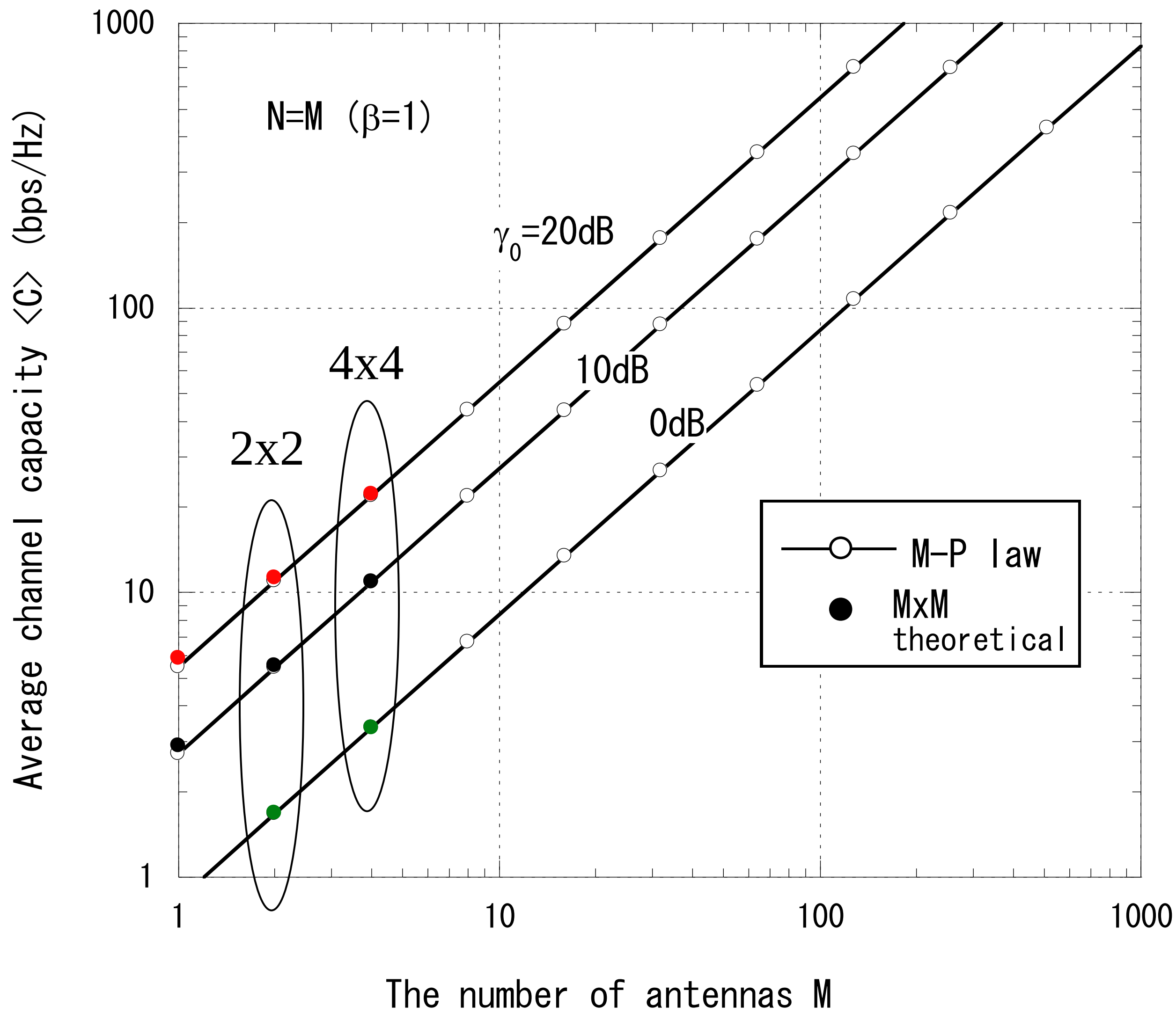
$$= \frac{M\gamma_0}{\ln 2}\,{}_3F_2\left[\left\{1,1,\frac{3}{2}\right\},\{2,3\},-4\gamma_0\right]$$

Mathematica

数値計算上完全一致

$\propto M$ ← M-P則では、アンテナ数に厳密に比例

β=1 (M=N)のケースにおける平均通信路容量



任意の β の値に対する平均通信路容量 (漸近固有値分布に基づく)

$$\langle C \rangle_{M-P} = \int_0^\infty \log_2\left(1+\frac{\gamma_0\lambda}{M}\right) f\left(\frac{\lambda}{M}\right) d\lambda$$

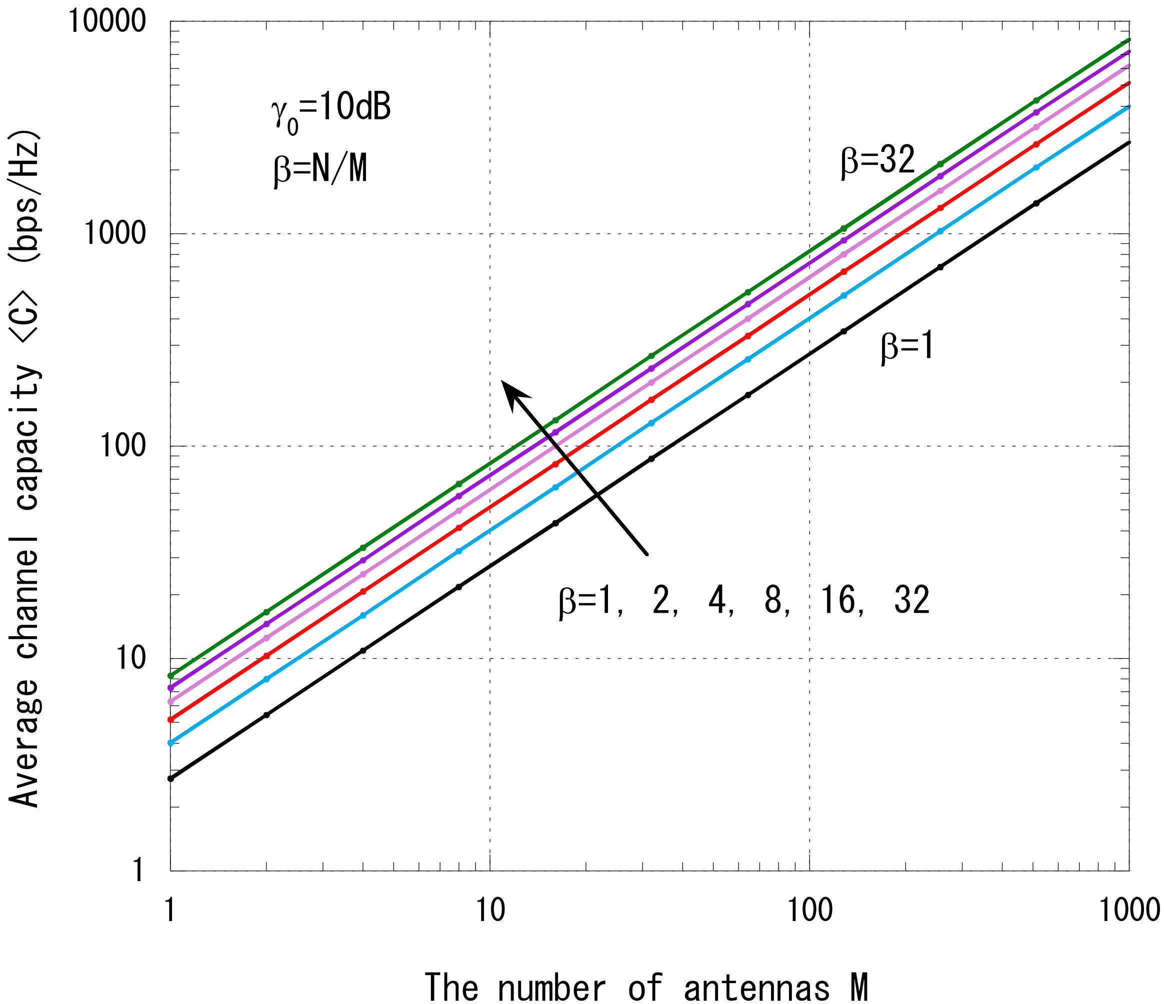
$$= \boxed{\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{(1-\sqrt{\beta})^2 M}^{(1+\sqrt{\beta})^2 M} \log_2\left(1+\frac{\gamma_0 x}{M}\right) \frac{\sqrt{4\beta-\left(\frac{x}{M}-1-\beta\right)^2}}{x} dx \right\}} M$$

数値積分をしてみると
この部分はMに依存しない

$$\langle C \rangle_{M-P} = g(\gamma_0, \beta) M \longleftarrow$$

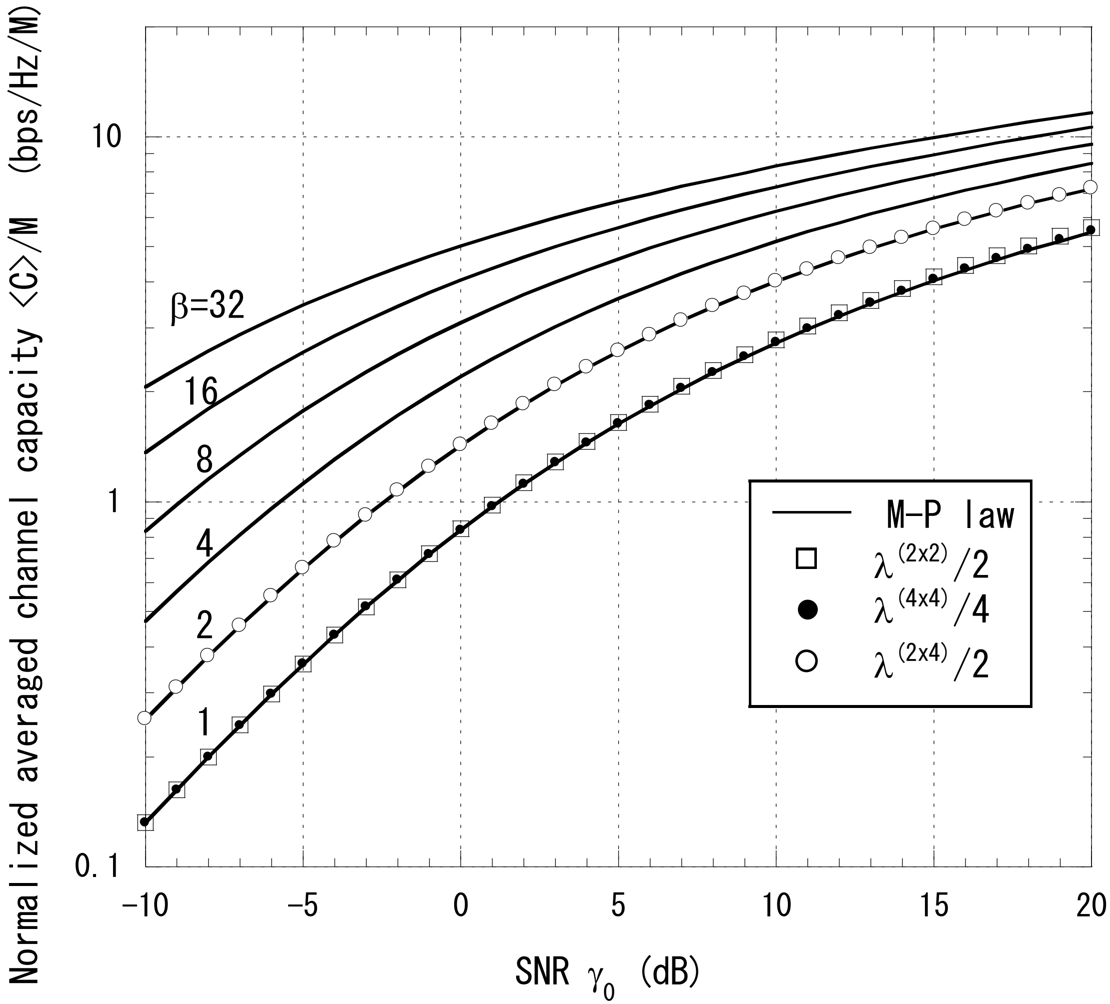
アンテナ数に厳密に比例

βをパラメータとする平均通信路容量vsアンテナ数N (γ_0=10dB)



平均正規化通信路容量のSNR特性

$$\langle C \rangle_{M-P} / M = g(\gamma_0, \beta)$$

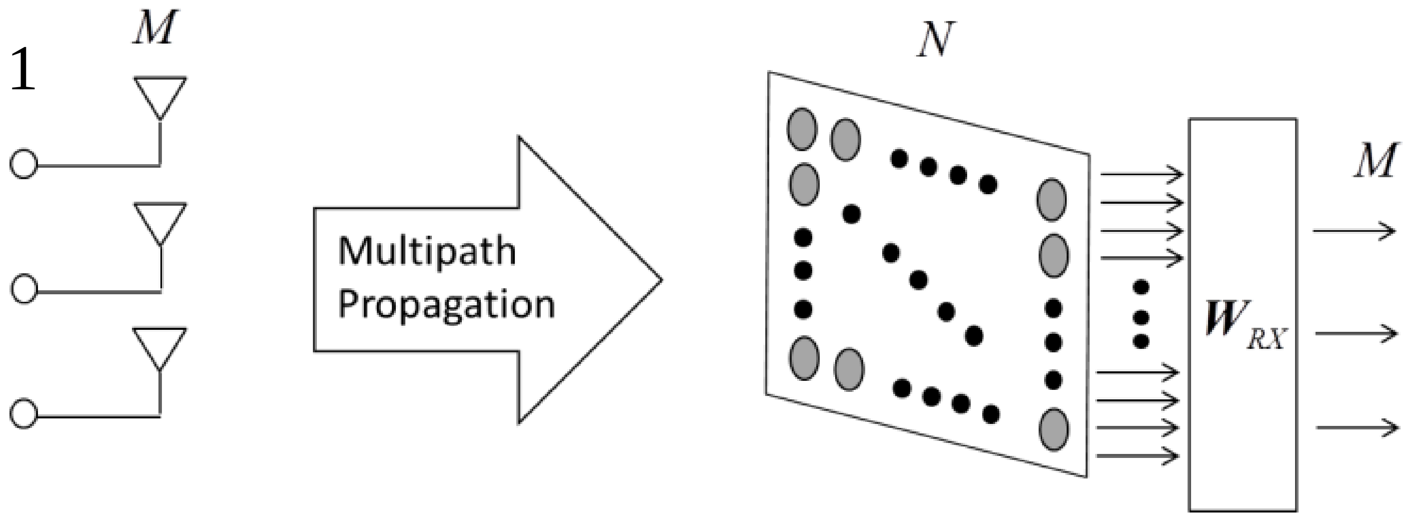


何と、最小規模 MIMO の2×2でも、平均正規化通信路容量は漸近固有値分布から、極めて精度よく推定できる!!

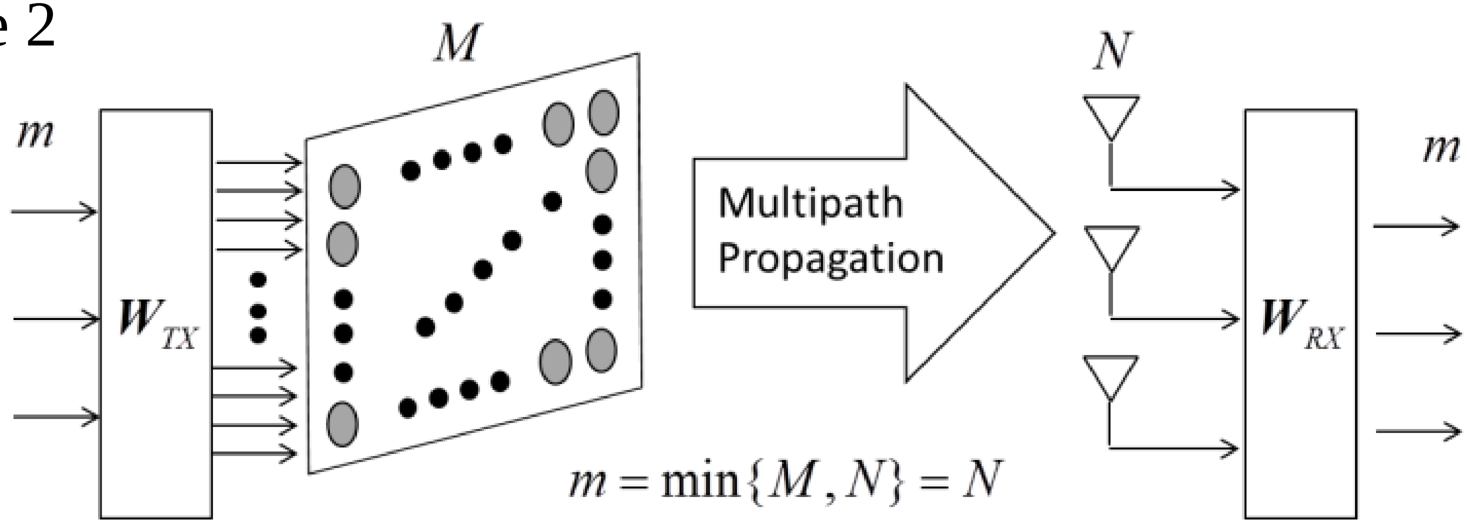
漸近固有値分布理論(M-P則に基づく)は非常に適用範囲が広い

本稿が解析対象としたシステムイメージ:　$N \geq M$

Case 1



Case 2



CSIは利用するが、送信電力制御はしないケース

まとめ

1）Massive MIMOの固有値解析では、ランダムマトリクス理論に基づく漸近固有値解析（マルチェンコ・パスツール則を利用した）が利用される

2）漸近固有値解析とは, N/Mの値を固定した状態で、Mが無限大付近の順序無固有値分布を調べるものである

3）有限サイズの$M \times N$ MIMOの平均通信路容量を、漸近固有値分布から近似的に求めることができるが、その近似精度は、2×2 MIMOの場合でも、驚くほど良い。（適用性が極めて大きい）

4）ただし、平均通信路容量ではなく、通信路容量の確率分布を求めたい場合には、また、別の景色が見えてくると思う。次の課題としたい。

5）ここでは、理論計算値のみを示しているが、この結果の妥当性は、計算機シミュレーションで確認している